50

Armónicos

50-1 Tonos musicales

Se dice que Pitágoras descubrió que cuando se hace sonar a la vez dos cuerdas similares bajo la misma tensión y diferentes sólo en longitud, dan un efecto que es agradable al oído *si* las longitudes de las cuerdas están en proporción de dos números enteros pequeños. Si las longitudes son como uno es a dos, corresponden entonces a la octava en música. Si las longitudes son como dos es a tres, corresponden al intervalo entre do y sol, que se llama una quinta. Estos intervalos se aceptan generalmente como acordes que suenan "agradable".

Pitágoras se impresionó tanto con este descubrimiento que lo hizo la base de una escuela –se llamaron pitagóricos– que tuvo creencias místicas en los grandes poderes de los números. Se creyó que algo parecido se encontraría en los planetas –o "esferas"–. Algunas veces oímos la expresión: "la música de las esferas". La idea fue que habría algunas relaciones numéricas entre las órbitas de los planetas o entre otras cosas en la naturaleza. La gente cree generalmente que esto fue solamente una especie de superstición mantenida por los griegos. Pero, ¿es esto tan diferente de nuestro interés científico en las relaciones cuantitativas? El descubrimiento de Pitágoras fue el primer ejemplo, fuera de la geometría, de una relación numérica en la naturaleza. Debe haber sido muy sorprendente el descubrir de repente que había un *hecho* de la naturaleza que involucraba una relación numérica sencilla. Simples medidas de longitudes dieron una predicción de algo que no tenía conexión aparente con la geometría –la producción de sonidos agradables–. Este descubrimiento condujo a la extensión de que quizás una buena herramienta para la comprensión de la naturaleza sería el análisis aritmético y matemático. Los resultados de la ciencia moderna justifican este punto de vista.

Pitágoras solamente pudo haber hecho su descubrimiento mediante una observación experimental. No obstante, este aspecto importante, parece no haberle impresionado. De lo contrario, la física hubiera tenido un comienzo más temprano. (¡Siempre es fácil reconsiderar lo que alguien ha hecho y decidir lo que él *debería* haber hecho!)

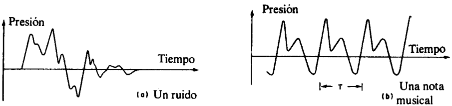

Fig. 50-1. Presión en función del tiempo para (a) un ruido, y (b) una nota musical.

Podemos observar un tercer aspecto de este interesante descubrimiento: que el descubrimiento tiene que ver con dos notas que *suenan agradable* al oído. Podemos preguntarnos si *nosotros hemos* avanzado más que Pitágoras en la comprensión de *por qué* sólo ciertos sonidos son agradables al oído. La teoría general de la estética no está probablemente más adelantada ahora que en el tiempo de Pitágoras. En este descubrimiento de los griegos encontramos los tres aspectos: experimento, relaciones matemáticas y estética. La física ha tenido un gran adelanto solamente en las dos primeras partes. Este capítulo tratará sobre nuestra comprensión actual del descubrimiento de Pitágoras.

Entre los sonidos que oímos hay una clase que llamamos *ruido.* El ruido corresponde a una especie de vibración irregular del tímpano producida por una vibración irregular de algún objeto cercano. Si hacemos un diagrama para indicar la presión del aire en el tímpano (y, por lo tanto, el desplazamiento del mismo) en función del tiempo, la gráfica que corresponde a un ruido puede parecerse a la que representa la figura 50-1(a). (Tal ruido podría corresponder aproximadamente al sonido de un zapatazo.) El sonido de la *música* tiene un carácter diferente. La música se caracteriza por la presencia de *tonos* más o menos *prolongados* –o "notas" musicales–. (¡Los instrumentos musicales también pueden hacer ruidos!) El tono puede durar un tiempo relativamente corto, como cuando se presiona una tecla en un piano, o se puede prolongar casi indefinidamente, como cuando un flautista mantiene una nota larga.

¿Cuál es el carácter especial de una nota musical desde el punto de vista de la presión en el aire? Una nota musical difiere de un ruido en que hay una periodicidad en su gráfica. Hay una cierta forma irregular de la variación de presión del aire con el tiempo y la forma se repite una y otra vez. La figura 50-1(b) muestra un ejemplo de función presión-tiempo que correspondería a una nota musical.

Los músicos hablan corrientemente de un tono musical en términos de tres características: intensidad, tono y "timbre". La "intensidad" corresponde a la magnitud de los cambios de presión. El "tono" corresponde al período de tiempo para una repetición de la función básica de presión. (Las notas "bajas" tienen períodos más grandes que las notas "altas".) El "timbre" de una nota tiene que ver con las diferencias que somos capaces de oír entre dos notas de la misma intensidad y tono. Un oboe, un violín, y una soprano se pueden distinguir aun cuando den notas del mismo tono. El timbre tiene que ver con la estructura del diagrama que se repite.

Consideremos por un momento el sonido producido por una cuerda vibrante. Si accionamos la cuerda, tirando de ella y soltándola, el movimiento subsiguiente estará determinado por los movimientos de las ondas que hemos producido. Sabemos que estas ondas viajarán en ambas direcciones y que se reflejarán en los extremos. Irán hacia adelante y hacia atrás durante mucho tiempo. Aunque la onda sea muy complicada, se repetirá. El período de repetición es justamente el tiempo T necesario para que la onda viaje dos longitudes completas de la cuerda. Porque éste es exactamente el tiempo que necesita cualquier onda, una vez que ha comenzado, para reflejarse en cada extremo, volver a su posición inicial y seguir en la dirección original. El tiempo es el mismo para ondas que comiencen en cualquier dirección. Cada punto de la cuerda volverá, pues, a su posición inicial después de un período, y de nuevo un período más tarde, etc. La onda de sonido producida debe tener también la misma repetición. Vemos por qué una cuerda accionada produce una nota musical.

50-2 La serie de Fourier

Discutimos en el capítulo precedente otro modo de considerar el movimiento de un sistema vibrante. Hemos visto que una cuerda tiene diversos modos naturales de oscilación y que cualquier clase particular de vibración que se pueda originar por las condiciones originales, se puede considerar como una combinación –en proporciones convenientes –de varios de los modos naturales oscilando a la vez. Encontramos que los modos normales de oscilación para una cuerda tenían las frecuencias ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$,... El movimiento más general de una cuerda que ha sido pulsada, por lo tanto, está compuesta de la suma de una oscilación sinusoidal a la frecuencia fundamental ω_0, otra a la frecuencia del segundo armónico $2\omega_0$, otra a la del tercer armónico $3\omega_0$, etcétera. Ahora bien, el modo fundamental se repite cada período $T_1 = 2\pi/\omega_0$. El segundo armónico se repite cada $T_2 = 2\pi/2\omega_0$. *También* se repite cada $T_1 = 2T_2$, después de *dos* de sus períodos. Análogamente, el tercer modo armónico se repite después de un tiempo T_1 equivalente a 3 de sus períodos. Vemos de nuevo por qué una cuerda pulsada repite todo su diagrama con periodicidad T_1. Produce una nota musical.

Hemos estado hablando del movimiento de una cuerda. Pero el *sonido*, que es el movimiento del aire, es producido por el movimiento de la cuerda, por lo que sus vibraciones también deben estar compuestas de los mismos armónicos –aunque no estamos pensando ya en los modos normales del aire–. Igualmente, la intensidad relativa de los armónicos puede ser diferente en el aire que en la cuerda, particularmente si la cuerda está "acoplada" al aire mediante una caja de resonancia. La eficiencia del acoplamiento al aire es diferente para diferentes armónicos.

Si $f(t)$ representa la presión del aire en función del tiempo para una nota musical |como la de la figura 50-1(b)|, entonces esperamos que se pueda escribir $f(t)$ como suma de un cierto número de funciones armónicas simples del tiempo –como $\cos \omega t$– para cada una de las diversas frecuencias armónicas. Si el período de la vibración es T, la frecuencia angular fundamental será $\omega = 2\pi/T$ y los armónicos serán 2ω, 3ω, etc.

Hay una pequeña complicación. Para cada frecuencia podemos esperar que las fases iniciales no serán necesariamente las mismas para todas las frecuencias. Por lo tanto deberíamos usar funciones como $\cos(\omega t + \phi)$. Sin embargo, es más sencillo usar en su lugar funciones seno y coseno para *cada* frecuencia. Recordemos que

$$\cos(\omega t + \phi) = (\cos\phi \cos\omega t - \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\omega t) \tag{50.1}$$

y como ϕ es una constante, *cualquier* oscilación sinusoidal de frecuencia ω se puede escribir como suma de un término con cos ωt y otro término con sen ωt.

Concluimos, entonces, que *cualquier* función $f(t)$ periódica con período T se puede escribir matemáticamente en la forma

$$\begin{aligned} f(t) = a_0 & \\ + a_1 \cos \omega t & + b_1 \operatorname{sen} \omega t \\ + a_2 \cos 2\omega t & + b_2 \operatorname{sen} 2\omega t \\ + a_3 \cos 3\omega t & + b_3 \operatorname{sen} 3\omega t \\ + \ldots \quad & + \ldots \end{aligned} \tag{50.2}$$

donde $\omega = 2\pi/T$ y las a y b son constantes numéricas que nos dicen cuánto de cada oscilación componente está presente en la oscilación $f(t)$. Hemos puesto el término a_0 de "frecuencia cero" para que nuestra fórmula sea completamente general, aunque corrientemente es cero para una nota musical. Representa una desviación del valor promedio (es decir, el nivel "cero") de la presión de sonido. Con él nuestra fórmula se puede aplicar a cualquier caso. La igualdad de la ecuación (50.2) está representada esquemáticamente en la figura 50-2. (Se debe escoger convenientemente las amplitudes a_n y b_n de las funciones armónicas. Están mostradas esquemáticamente y sin una escala particular en la figura.) La serie (50.2) se llama *serie de Fourier* de $f(t)$.

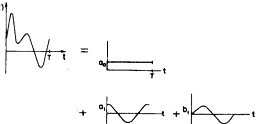

Fig. 50-2. Cualquier función periódica *f(t)* es igual a una suma de funciones armónicas simples.

Hemos dicho que *cualquier* función periódica se puede construir de este modo. Deberíamos corregir eso y decir que cualquier onda de sonido, o cualquier función de las que ordinariamente encontramos en física se puede construir mediante tal suma. Los matemáticos pueden inventar funciones que no se pueden construir a partir de funciones armónicas simples –por ejemplo, una función que tiene una "vuelta hacia atrás"–, ¡de modo que tiene dos valores para algunos valores de *t!* No tenemos por qué preocuparnos de esas funciones aquí.

50-3 Timbre y consonancia

Ahora estamos en condiciones de describir qué es lo que determina el "timbre" de una nota musical. Es la cantidad relativa de los diversos armónicos –los valores de las a y b–. Una nota con el primer armónico solamente es una nota "pura". Una nota con muchos armónicos fuertes es una nota "rica". Un violín produce una proporción de armónicos diferente de la que produce un oboe.

Podemos "fabricar" diversas notas musicales si conectamos diversos "osciladores" a un altoparlante. (Un oscilador produce corrientemente una función armónica simple casi pura.) Deberíamos escoger las frecuencias de los osciladores de manera que sean ω, 2ω, 3ω, etc. Ajustando entonces el control de volumen de cada oscilador, podemos añadir cualquier cantidad que deseemos de cada armónico –y por consiguiente producir notas de diferente timbre–. Un órgano eléctrico trabaja de un modo parecido. Las "teclas" seleccionan la frecuencia del oscilador fundamental y las "clavijas" son llaves que controlan la proporción relativa de los armónicos. Usando estas llaves se puede hacer que el órgano suene como una flauta, un oboe o un violín.

Es interesante que para producir tales notas "artificiales" necesitamos solamente un oscilador para cada frecuencia –no necesitamos osciladores separados para las componentes seno y coseno. El oído no es muy sensible a las fases relativas de los armónicos. Presta atención principalmente al *total* de las partes seno y coseno de cada frecuencia. Nuestro análisis es más exacto de lo necesario para explicar el aspecto *subjetivo* de la música. Sin embargo, la respuesta de un micrófono o de cualquier otro instrumento físico sí depende de las fases y nuestro análisis completo se puede necesitar para tratar tales casos.

El "timbre" de un sonido hablado también determina los sonidos de vocales que reconocemos en el lenguaje. La forma de la boca determina las frecuencias de los modos naturales de vibración del aire en la boca. Algunos de estos modos se ponen en vibración mediante las ondas de sonido provenientes de las cuerdas vocales. De manera que las amplitudes de algunos de los armónicos del sonido se aumentan respecto a otras. Cuando cambiamos la forma de nuestra boca, damos preferencia a armónicos de frecuencias diferentes. Estos efectos cuentan para la diferencia entre un sonido "e-e-e" y un sonido "a-a-a".

Todos sabemos que un sonido vocal particular –"e-e-e", digamos– aún "suena como" la misma vocal, ya lo digamos (o cantemos) en un tono alto o bajo. Del mecanismo que describimos, esperaríamos que se acentuasen frecuencias *particulares* cuando colocamos nuestra boca para una "e-e-e" y que *no* cambiasen cuando nosotros cambiamos el tono de nuestra voz. Así, la relación de los armónicos importantes al fundamental –esto es, el "timbre"– cambia cuando nosotros cambiamos el tono. Aparentemente el mecanismo mediante el cual reconocemos el lenguaje no se basa en relaciones armónicas específicas.

¿Qué diríamos ahora acerca del descubrimiento de Pitágoras? Comprendemos que dos cuerdas semejantes con longitudes en la proporción de 2 a 3 tendrán frecuencias fundamentales en la proporción de 3 a 2. Pero, ¿por qué deberían "sonar agradable" juntas? Quizás deberíamos buscar la explicación en las frecuencias de los armónicos. El segundo armónico más bajo de la cuerda más corta tendrá *igual* frecuencia que el tercer armónico de la cuerda más larga. (Es fácil demostrar –o creer– que una cuerda *pulsada* produce con mucha intensidad los diversos armónicos más bajos.)

Quizás deberíamos dar las siguientes reglas. Las notas son consonantes cuando tienen armónicos de la misma frecuencia. Las notas son disonantes si sus armónicos superiores tienen frecuencias cercanas, pero lo bastante separadas para que haya pulsaciones rápidas entre las dos. Por qué las pulsaciones no suenan agradables y por qué los unísonos de los armónicos superiores suenan agradables es algo que no sabemos definir o describir. No podemos decir a partir de este conocimiento de lo que *suena* bien, lo que debería, por ejemplo, *oler* bien. En otras palabras, nuestro conocimiento de ello no es algo más general que el aserto de que cuando están al unísono suenan bien. No nos permite deducir nada más que las propiedades de la armonía en música.

Es fácil comprobar las relaciones armónicas que hemos descrito mediante algunos experimentos sencillos con el piano. Llamemos a los tres do sucesivos por la mitad del teclado do_1, do_2, do_3, y a los sol inmediatamente superiores, sol_1, sol_2, sol_3. Entonces tendremos las frecuencias relativas fundamentales como sigue:

do_1-2	sol_1- 3
do_2-4	sol_2- 6
do_3-8	sol_3-12

Estas relaciones armónicas se pueden demostrar en la siguiente forma: Supongan que presionamos do_2 *despacio* –de esa manera no suena, pero hacemos que el amortiguador se levante–. Si entonces hacemos sonar do_1 producirá su fundamental propio *y* algunos armónicos secundarios. El segundo armónico pondrá en vibración las cuerdas de do_2. Si soltamos do_1 (presionando aún do_2) el amortiguador detendrá la vibración de las cuerdas de do_1, y podemos oír (suavemente) la nota do_2 que se va apagando. De un modo semejante, el tercer armónico de do_1 puede causar una vibración de sol_2. O el sexto de do_1 (haciéndose ahora mucho más débil) puede ocasionar una vibración del fundamental de sol_3.

Se obtiene un resultado algo diferente si presionamos sol_1 con cuidado y hacemos sonar do_2. El tercer armónico de do_2 corresponderá al cuarto armónico de sol_1, por lo que *solamente* se excitará el cuarto armónico de sol_1. Podemos oír (si escuchamos de cerca) el sonido de sol_3 ¡que está dos octavas por encima del sol_1 que hemos apretado! Es fácil imaginar otras combinaciones para este juego.

Podemos señalar de paso que la escala mayor se puede definir justamente mediánte la condición de que los tres acordes mayores (fa-la-do), (do-mi-sol) y (sol-si-re) representen *cada uno* secuencias de notas con la relación de frecuencias (4: 5: 6). Estas relaciones –además del hecho de que una octava ($do_1 - do_2$, $si_1 - si_2$, etc.) tiene la relación 1:2– determina la escala total para el caso "ideal", o sea para lo que se llama "entonación justa". Los instrumentos de teclado como el piano *no* se afinan usualmente así, pero se hace un poco de "fraude" para que las frecuencias sean *aproximadamente* correctas para todos los posibles tonos de partida posibles. Para esta afinación, que se llama "templado", la octava (aún 1 : 2) se divide en 12 intervalos iguales para los cuales la relación de frecuencia es $(2)^{2/12}$. Una quinta ya no tiene la relación de frecuencia $^3/_2$, sino $2^{7/12} = 1\,499$, que aparentemente es bastante aproximada para la mayoría de los oídos.

Hemos establecido una regla de consonancia en términos de la coincidencia de armónicos. ¿Es quizás esta coincidencia la *razón* de que dos notas sean consonantes? Un investigador ha sostenido que dos notas *puras* –notas fabricadas cuidadosamente para estar libres de armónicos– no dan las *sensaciones* de consonancia o disonancia cuando las frecuencias relativas están colocadas en o cerca de las relaciones esperadas. (Tales experimentos son difíciles porque es difícil fabricar notas puras por motivos que más adelante veremos.) Aún no podemos estar seguros de si el oído está apareando armónicos o haciendo aritmética cuando nosotros decidimos que nos agrada un sonido.